УДК 517.946

И. В. Скрыпник

ПОТОЧЕЧНАЯ ОЦЕНКА РЕШЕНИЯ МОДЕЛЬНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

Доказана оценка $|u(x,t)| \leqslant c\,|k|\,(d\,|x|^{-1})^{n-2}$, $n \geqslant 3$ решения квазилинейного параболического уравнения второго порядка в области $\{B(R) \setminus E\} \times [0, T]$, $E \subset B(d) = \{x \in R^n : |x| < d\}$ при граничных условиях $u(x,t) = k$ при $x \in \partial E$, $u(x,t) = 0$ при $x \in \partial B(R)$ и определенных условиях на начальную функцию.

Исследование усреднения нелинейных эллиптических граничных задач в перфорированных областях, изучение поведения решений нелинейных эллиптических уравнений вблизи негладкой границы стало возможным в последние годы благодаря поточечным оценкам решений нелинейных уравнений (см. [1]). Подобные оценки, метод доказательства которых в эллиптическом случае излагается в работе [2], представляют интерес и для параболических уравнений в связи с применениями к вопросам качественной теории, в частности, при изучении регулярности по Винеру граничных точек. Данная статья посвящена развитию метода доказательства поточечных оценок для нелинейного параболического уравнения.

1. Формулировка предположений и результата. Пусть $B(R)$ — шар радиуса R в R^n с центром в нуле, $n \geqslant 3$, E — замкнутое множество, содержащееся в $B(d)$, $d < \min\left(1, \frac{R}{8}\right)$ и обозначим $\Omega = B(R) \setminus E$,

$$Q = \{(x,t) : x \in \Omega,\ t \in [0, T]\}, \quad \Omega_\tau = \{(x,t) : x \in \Omega,\ t = \tau\},$$
$$Q_\tau = \{(x,t) : x \in \Omega,\ t \in [0, \tau]\}, \quad S = \{(x,t) : x \in \partial\Omega,\ t \in [0, T]\}.$$

Будет получена оценка решения задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i} a_i\left(x, t, \frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0, \quad (x,t) \in Q, \tag{1}$$

$$u(x,t) = kf(x), \quad (x,t) \in S \cup \Omega_0, \tag{2}$$

при $k \in R^1$.

Предполагаем в дальнейшем, что функции $a_i(x, t, p)$, $i = 1, \ldots, n$ определены при $(x, t) \in Q$, $p \in R^n$ и удовлетворяют при рассматриваемых значениях аргументов условиям:

a_1) для почти всех x, t функции $a_i(x, t, p)$ непрерывны по p и для всех p эти функции измеримы по x, t; $a_i(x, t, 0) = 0$ при $i = 1, \ldots, n$;

a_2) с положительной постоянной ν_1 выполнены неравенства

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x,t,p)\,p_i \geqslant \nu_1 |p|^2, \quad \sum_{i=1}^{n} |a_i(x,t,p)| \leqslant \nu_1^{-1} \cdot |p|. \tag{3}$$

Предполагаем, что функция $f(x)$, содержащаяся в (2), определена при $x \in B(R)$, принадлежит $\overset{0}{W}{}^{1}_{2}(B(R))$ и удовлетворяет условиям:

f_1) $f(x) \equiv 1$ при $x \in E$;

f_2) с положительной постоянной ν_2 выполнены неравенства

$$\int_\Omega \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|^2 dx \leqslant \nu_2 d^{n-2}, \quad 0 \leqslant f(x) \leqslant \min\left[1, \nu_2\left(\frac{d}{|x|}\right)^{n-2}\right]. \tag{4}$$

Замечание 1. Ограничиваемся в данной статье модельным уравнением (1) ради простоты изложения метода доказательства. Специальный характер условий f_1), f_2) обусловлен интересами, связанными с применениями поточечных оценок в качественной теории.

При сформулированных предположениях просто доказывается разрешимость задачи (1), (2) в пространстве $V_2(Q)$, норма в котором описывается равенством

$$\| u \|^2_{V_2(Q)} = \operatorname{vrai}\max_{0 \leqslant t \leqslant T} \int_\Omega u^2(x, t)\, dx + \int_Q \left| \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right|^2 dxdt.$$

Определение $V_2(Q)$ и используемых ниже пространств $\overset{\circ}{V}_2(Q)$, $\overset{\circ}{V}{}_2^{1,0}(Q)$, $V_2^{1,\frac{1}{2}}(Q)$, $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,1}(Q)$ содержится в [3]. Аналогично [3] под решением задачи (1), (2) понимаем функцию $u(x, t) \in V_2(Q)$, такую, что $u(x, t) - kf(x) \in \overset{\circ}{V}_2(Q)$ и при любых $\varphi(x, t) \in \overset{\circ}{W}{}_2^{1,1}(Q)$, $\tau \in [0, T]$ справедливо интегральное тождество

$$\int_\Omega u(x, \tau)\, \varphi(x, \tau)\, dx - k \int_\Omega f(x)\, \varphi(x, 0)\, dx +$$

$$+ \int_0^\tau \int_\Omega \left\{ -u \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \sum_{j=1}^n a_j \left(x, t, \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right\} dxdt = 0. \tag{5}$$

Следуя [3], можно показать, что $u(x, t) \in V_2^{1,\frac{1}{2}}(Q)$. Отметим еще интегральное тождество

$$\int_0^{t_1} \int_\Omega \left\{ \frac{\partial}{\partial t} u_{(h)}(x, t)\, \psi(x, t) + \sum_{j=1}^n \left[a_j \left(x, t, \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right]_{(h)} \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x_j} \right\} dxdt = 0, \tag{6}$$

справедливое при $h > 0$, $0 < t_1 < T - h$ для произвольной функции $\psi(x, t) \in \overset{\circ}{V}{}_2^{1,0}(Q_t)$. В (6) использовано обозначение

$$\varphi_{(h)}(x, t) = [\varphi(x, t)]_{(h)} = \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \varphi(x, s)\, ds$$

для усреднения по t.

Основным результатом статьи является

Теорема 1. Предположим, что выполнены условия a_1), a_2), f_1), f_2). Тогда существует постоянная c, зависящая лишь от R, T, n, ν_1, ν_2, такая, что для решения $u(x, t)$ задачи (1), (2) имеет место оценка

$$|u(x, t)| \leqslant |k| \min \left\{ 1, c \left(\frac{d}{|x|} \right)^{n-2} \right\} \text{ при } (x, t) \in Q. \tag{7}$$

Замечание 2. Просто показать, что для решения $u(x, t)$ задачи (1), (2) справедлива оценка

$$0 \leqslant \operatorname{sign} k \cdot u(x, t) \leqslant |k|. \tag{8}$$

Для проверки второго неравенства, например, при $k > 0$ достаточно подставить в (6) $\psi(x, t) = \max\{u_{(h)}(x, t) - k, 0\}$ и воспользоваться условием a_2). Поэтому в дальнейшем нуждается в доказательстве только оценка

$$|u(x, t)| \leqslant c|k| \left(\frac{d}{|x|} \right)^{n-2}, \quad (x, t) \in Q. \tag{9}$$

Замечание 3. В дальнейшем достаточно оценить решение задачи (1), (2) при $k > 0$, так как в случае отрицательного k можно перейти к оценке функции $v(x, t) = -u(x, t)$, являющейся решением задачи вида (1), (2) с заменой в условии (2) k на $-k$.

Замечание 4. Развитым в настоящей работе методом можно получить оценку решения задачи (1), (2) и при $n < 3$. В частности, при $n = 2$ в оценке (9) выражение $\left(\frac{d}{|x|} \right)^{n-2}$ заменяется на $\ln \frac{d}{|x|}$.

2. Оценка $I_r(s, \tau)$. Доказательству оценки (8) предшествует получение более простых интегральных оценок для $u(x, t)$. Будем обозначать для функции $g(x, t)$ через $[g(x, t)]_+$ следующее выражение: $\max\{g(x, t), 0\}$.

Определим при $r \in (d, R]$

$$m_r = \operatorname*{vrai\,max}_{|x|=r,\ t\in[0,T]} u(x,t), \quad u_r(x,t) = [u(x,t) - m_r]_+, \tag{10}$$

$$E_r = \{(x,t) \in Q : u(x,t) > m_r\}, \quad E_r^{(\tau)} = E_r \cap \Omega_\tau.$$

Аналогично доказательству неравенства (8) можно получить $u(x, t) \leqslant m_r$ при $r \leqslant |x| \leqslant R$, $t \in [0, T]$ так, что справедливо включение

$$E_r \subset \overline{(B(r) \setminus E)} \times [0, T]. \tag{11}$$

Зафиксируем в дальнейшем функцию $\lambda(t)$ класса $C^\infty(R^1)$, равную единице при $|t| \leqslant \frac{1}{2}$, нулю при $|t| \geqslant 1$, удовлетворяющую условиям

$$\operatorname{sign} t\lambda'(t) \leqslant 0, \quad |\lambda'(t)| \leqslant 3, \quad 0 \leqslant \lambda(t) \leqslant 1.$$

И пусть $\lambda_s(t) = \lambda\left(\frac{t}{s}\right)$ для $s > 0$. Отметим, что при $s_1 < s_2$ справедливо неравенство $\lambda_{s_1}(t) \leqslant \lambda_{s_2}(t)$.

Обозначим при $r \in (d, R]$, $\tau \in [0, T]$, $s \in (0, T]$

$$I_r(s, \tau) = \operatorname*{vrai\,max}_{0\leqslant t\leqslant T} \int_\Omega u_r^2(x, t)\lambda_s^2(t-\tau)\,dx + \int_{E_r} \left|\frac{\partial}{\partial x} u(x,t)\right|^2 \lambda_s^2(t-\tau)\,dxdt, \tag{12}$$

где $u(x, t)$ — решение задачи (1), (2) и использованы обозначения (10). Будет доказана

Теорема 2. Предположим, что выполнены условия a_1), a_2), f_1), f_2) и $k > 0$. Тогда существуют постоянные $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$, зависящие только от R, T, n, ν_1, ν_2, такие, что при

$$2d \leqslant r \leqslant R, \quad \mathcal{K}_1 r^2 \leqslant s \leqslant T, \quad 0 \leqslant \tau \leqslant T \tag{13}$$

для решения $u(x, t)$ задачи (1), (2) справедлива оценка

$$I_r(s, \tau) \leqslant \mathcal{K}_2 sk(k - m_r)\,d^{n-2}. \tag{14}$$

Получению оценки (14) будет предшествовать получение предварительных интегральных оценок. В следующих ниже леммах через $c^{(i)}$, c_j, $i, j = 1, 2, \dots$ будем обозначать постоянные, зависящие лишь от R, T, n, ν_1, ν_2. Далее $\varphi(y)$ бесконечно дифференцируемая функция на R^1, равная единице при $y \leqslant 1$, нулю при $y \geqslant 2$ и такая, что $0 \leqslant \varphi(y) \leqslant 1$, $|\varphi'(y)| \leqslant$ $\leqslant 2$. Обозначим $\varphi_d(x) = \varphi\left(\frac{|x|}{d}\right)$.

Лемма 1. Предположим, что выполнены условия теоремы 2. Тогда существуют постоянные $c^{(1)}, c^{(2)}, c^{(3)}$, такие, что имеют место оценки

$$\text{а)}\ \|u\|^2_{V_2(Q)} \leqslant c^{(1)}k^2 d^{n-2}, \tag{15}$$

$$\text{б)}\ \|u_r\|^2_{V_2(Q)} \leqslant c^{(2)}k(k - m_r)\,d^{n-2} \quad \text{при } r \in [2d, R], \tag{16}$$

$$\text{в)}\ \int_Q \left|\frac{\partial}{\partial x} u(x,t)\right|^2 \varphi_d^2(x)\,\lambda_s^2(t-\tau)\,dxdt \leqslant c^{(3)}sk^2d^{n-2} \tag{17}$$

при $r \in [2d, R]$, $s \in [d^2, T]$, $\tau \in [0, T]$.

Для доказательства (15) подставим в (6)

$$\psi(x, t) = u_{(h)}(x, t) - kf(x).$$

В полученном равенстве интегрируем по частям в интегралах, содержащих $\frac{\partial}{\partial t} u_{(h)}$, переходим к пределу при $h \to 0$ и оцениваем, используя неравенства (3). В результате

$$\int_{\Omega} u^2(x, t_1)\,dx + \int_{Q_{t_1}} \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dxdt \leqslant c_1 k^2 \left\{\int_{\Omega} f^2(x)\,dx + \int_{\Omega} \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|^2 dx\right\}.$$

Отсюда (15) следует в силу неравенств (4).

Для получения неравенства (16) подставляем в (6)

$$\psi(x, t) = [u_{(h)}(x, t) - m_r]_+ - (k - m_r) f(x).$$

Переходя к пределу по h и оценивая, получаем

$$\int_{Q} u_r^2(x, t_1)\,dx + \int_0^{t_1} \int_{E_r^{(t)}} \left|\frac{\partial}{\partial x} u(x, t)\right|^2 dxdt \leqslant \int_{\Omega} \{[kf(x) - m_r]_+^2 + (k - m_r) \times$$

$$\times u(x, t_1) f(x)\}\,dx + c_2(k - m_r) \int_{Q_{t_1}} \frac{\partial}{\partial x} u(x, t) \left|\left|\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right|\right. dxdt. \qquad (18)$$

Далее применяя неравенство $[kf(x) - m_r]_+ \leqslant (k - m_r) f(x)$, оценки (4) и (15), получаем из (18) неравенство (16).

Доказательство (17) получается стандартными рассуждениями после подстановки в (6) функции

$$\psi(x, t) = u_{(h)}(x, t)\,\varphi_d^2(x)\,\lambda_s^2(t - \tau) - k\varphi_d^2(x)\,\lambda_s^2(t - \tau).$$

Лемма 2. Пусть выполнены условия теоремы 2. Предположим, что при некоторых $r \in [2d, R]$, $s' \in (2r^2, T]$, $\tau \in [0, T]$ имеет место неравенство

$$I_r(s', \tau) \leqslant \mathcal{K} s' k (k - m_r) d^{n-2}. \qquad (19)$$

Тогда при произвольном $s \in \left[r^2, \frac{s'}{2}\right]$ справедлива оценка

$$I_r(s, \tau) \leqslant c^{(4)} \left\{s + \mathcal{K} \frac{r^2}{s} s'\right\} k (k - m_r) d^{n-2}. \qquad (20)$$

Доказательство. Подставим в интегральное тождество (6)

$$\psi(x, t) = [u_{(h)}(x, t) - m_r]_+ \lambda_s^2(t - \tau) - (k - m_r)\,\varphi_d^2(x)\,\lambda_s^2(t - \tau).$$

Переходя к пределу по h и оценивая на основании условий (3), имеем

$$\int_{\Omega} \left\{\frac{1}{2} u_r^2(x, t) - (k - m_r) u(x, t)\,\varphi_d^2(x)\right\} \lambda_s^2(t - \tau)\,dx\,\Big|_0^{t_1} -$$

$$-2 \int_0^{t_1} \int_{\Omega} \left\{\frac{1}{2} u_r^2(x, t) - (k - m_r) u(x, t)\,\varphi_d^2(x)\right\} \lambda_s(t - \tau) \frac{d}{dt} \lambda_s(t - \tau)\,dxdt +$$

$$+ \nu_1 \int_0^{t_1} \int_{E_r^{(t)}} \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 \lambda_s^2(t - \tau)\,dxdt \leqslant c_3(k - m_r) \int_0^{t_1} \int_{\Omega} \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \varphi_d \times \qquad (21)$$

$$\times \left|\frac{d\varphi_d}{dx}\right| \lambda_s^2(t - \tau)\,dxdt.$$

Используя неравенство (17) при оценке правой части (21) и условия на $f(x)$, $\varphi_d(x)$, $\lambda_s(t - \tau)$, получаем из (21)

$$I_r(s, \tau) \leqslant c_4 \left\{k(k - m_r) s d^{n-2} + \frac{1}{s} \int_{E_r} u_r^2(x, t)\,\lambda_{2s}^2(t - \tau)\,dxdt\right\}. \qquad (22)$$

Интеграл в (22) оценим по неравенству Пуанкаре, учитывая (11)

$$\int_{\hat{E}_r} u_r^2(x,t)\,\lambda_{2s}^2(t-\tau)\,dxdt \leqslant c_5 r^2 \int_{\hat{E}_r} \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 \lambda_{2s}^2(t-\tau)\,dxdt. \tag{23}$$

Теперь оценка (20) является следствием неравенств (19), (22), (23).

Перейдем к получению оценки $I_r(s,\tau)$.

Доказательство теоремы 2. Покажем, что $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ можно представить в виде

$$\mathcal{K}_1 = \mathcal{K}_2 + 1, \quad \mathcal{K}_2 = 2\max\left\{\frac{c^{(2)}}{T}, 2c^{(4)}\right\}, \tag{24}$$

где $c^{(2)}, c^{(4)}$ — постоянные, определенные в леммах 1, 2.

Определим конечную числовую последовательность

$$s_j = 2^{-j+1}T, \quad j = 1, 2, \ldots, J$$

с J, удовлетворяющим условию $2^{-J}T < \mathcal{K}_1 r^2 \leqslant 2^{-J+1}T$.

Будем вначале доказывать оценки

$$I_r(s_j,\tau) \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{K}_2 s_j k(k-m_r)\,d^{n-2} \tag{25}$$

для $j = 1, 2, \ldots, J$. При $j=1$ оценка (25) следует из (16). Пусть неравенство (25) справедливо для $j \leqslant j_0 - 1$, $2 \leqslant j_0 \leqslant J$, покажем, что оно имеет место и для $j = j_0$. Применим лемму 4, полагая в ней s', s соответственно равными s_{j_0-1}, s_{j_0}. Используя оценку (25) при $j = j_0 - 1$, получаем

$$I_r(s_{j_0},\tau) \leqslant c^{(4)}\left\{s_{j_0} + \frac{1}{2}\mathcal{K}_2 \frac{r^2}{s_{j_0}}\cdot s_{j_0-1}\right\} k(k-m_r)\,d^{n-2} \leqslant$$

$$\leqslant c^{(4)} s_{j_0}\left\{1 + \frac{\mathcal{K}_2}{\mathcal{K}_1}\right\} k(k-m_r)\,d^{n-2} \leqslant \frac{\mathcal{K}_2}{2} s_{j_0} k(k-m_r)\,d^{n-2}.$$

Тем самым неравенства (25) доказаны при $j = 1, 2, \ldots, J$. Для произвольного $s \in [\mathcal{K}_1 r^2, T]$ определим целое число $j(s)$ так, чтобы $2^{-j(s)}T < s \leqslant 2^{-j(s)+1}T$. Тогда $1 \leqslant j(s) \leqslant J$ и

$$I_r(s,\tau) \leqslant I_r(s_{j(s)},\tau) \leqslant \frac{\mathcal{K}_2}{2} s_{j(s)} k(k-m_r)\,d^{n-2} \leqslant \mathcal{K}_2 s k(k-m_r)\,d^{n-2},$$

что доказывает неравенство (14), а следовательно, теорему 2.

3. Оценка $I_{r,\mu}(s,\tau)$. Далее μ — произвольное число из интервала $(0, k-m_r)$, и введем обозначения

$$[u_r]_\mu = \min\{u_r(x,t), \mu\}, \quad E_{r,\mu} = \{(x,t)\in Q : 0 \leqslant u_r(x,t) \leqslant \mu\},$$

$$E_{r,\mu}^{(\tau)} = E_{r,\mu} \cap \Omega_\tau,$$

$$I_{r,\mu}(s,\tau) = \int_{E_{r,\mu}} \left|\frac{\partial}{\partial x} u(x,t)\right|^2 \cdot \lambda_s^2(t-\tau)\,dxdt, \quad F_{r,\mu} = \{(x,t)\in Q : u_r(x,t) > \mu\}.$$

Будет доказана

Теорема 3. Предположим, что выполнены условия a_1), a_2), f_1), f_2) и пусть $k > 0$. Существует постоянная $\mathcal{K}_3$, зависящая лишь от R, T, n, ν_1, ν_2, такая, что для решения $u(x,t)$ задачи (1), (2) при $q \in (1,2)$, $\mu \in (0, k-m_r)$, r, s, τ, удовлетворяющих неравенствам (13), справедлива оценка

$$I_{r,\mu}(s,\tau) \leqslant \mathcal{K}_3\left\{\frac{r^2}{s} I_{r,\mu}(2s,\tau) + \frac{1}{(q-1)^2}\left[\mu k s d^{n-2} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{s\sqrt{s}}\mu^{2-q}\int_{F_{r,\mu}} |x|\, u_r^q(x,t)\,\lambda_{2s}^2(t-\tau)\,dxdt\right]\right\}. \tag{26}$$

Доказательству теоремы предшествует получение предварительных оценок. Как и ранее, через $c^{(i)}$, c_j обозначаем постоянные, зависящие лишь от R, T, n, ν_1, ν_2.

Лемма 3. Предположим, что выполнены условия теоремы 3. Тогда с некоторой постоянной $c^{(5)}$ справедлива оценка

$$\int\limits_{E_{r,\mu}} \left|\frac{\partial}{\partial x} u(x,t)\right|^2 dxdt \leqslant c^{(5)}\mu k d^{n-2}. \tag{27}$$

Доказательство. Подставим в (6)

$$\psi(x,t) = [u_{(h)r}]_\mu - \frac{\mu}{k-m_r}\, u_{(h),r}(x,t), \tag{28}$$

где $[u_{(h),r}]_\mu = \min[u_{(h),r}(x,t),\mu]$, $u_{(h),r}(x,t) = [u_{(h)}(x,t) - m_r]_+$.

В полученном равенстве интегрируем по частям слагаемых, содержащих производные по t, и переходим к пределу при $h \to 0$. Используя оценки (3), получаем

$$\int\limits_\Omega G_{r,\mu}(u(x,t))\,dx\,\Big|_0^{t_1} + \nu_1 \int\limits_0^{t_1} \int\limits_{E^{(t)}_{r,\mu}} \left|\frac{\partial}{\partial x} u(x,t)\right|^2 dxdt \leqslant \frac{1}{2}\,\frac{\mu}{k-m_r} \times$$

$$\times \int\limits_\Omega u_r^2(x,t)\,dx\,\Big|_0^{t_1} + c_6 \frac{\mu}{k-m_r} \int\limits_0^{t_1} \int\limits_{E^{(t)}_r} \left|\frac{\partial}{\partial x} u(x,t)\right|^2 dxdt. \tag{29}$$

Здесь $G_{r,\mu}(y)$ — функция, определенная на R^1 и равная соответственно нулю при $y \leqslant m_r$, $\frac{1}{2}(y - m_r^2)$ при $m_r \leqslant y \leqslant m_r + \mu$, $\frac{\mu^2}{2} + \mu(y - m_r - \mu)$ при $y \geqslant m_r + \mu$.

В силу оценки (16) правая часть (29) не превосходит $c_7 \mu k d^{n-2}$. Покажем, что аналогичным образом оценивается значение первого слагаемого левой части (28) при $t = 0$, и тем самым лемма будет доказана.

Пусть $\mathcal{D}^{(1)}_{r,\mu} = \{x \in \Omega : m_r \leqslant kf(x) \leqslant m_r + \mu\}$, $\mathcal{D}^{(2)}_{r,\mu} = \{x \in \Omega : kf(x) > m_r + \mu\}$. Имеем

$$\int\limits_{\mathcal{D}^{(1)}_{r,\mu}} G_{r,\mu}(kf(x))\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_{\mathcal{D}^{(1)}_{r,\mu}} [kf(x) - m_r]^2 dx \leqslant \frac{\mu}{2}\int\limits_{\mathcal{D}^{(1)}_{r,\mu}} [kf(x) - m_r]\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\mu}{2} k \int\limits_{B(r)} f(x)\,dx, \quad \int\limits_{\mathcal{D}^{(2)}_{r,\mu}} G_{r,\mu}(kf(x))\,dx = \int\limits_{\mathcal{D}^{(2)}_{r,\mu}} \left[\mu k f(x) - \mu m_r - \frac{\mu^2}{2}\right] dx \leqslant$$

$$\leqslant \mu k \int\limits_{B(r)} f(x)\,dx.$$

В силу (4) отсюда следует

$$\int\limits_\Omega G_{r,\mu}(kf(x))\,dx \leqslant c_8 \mu k r^2 d^{n-2},$$

что и заканчивает доказательство леммы.

Лемма 4. Предположим, что выполнены условия теоремы 3. Тогда существует постоянная $c^{(6)}$ такая, что для решения $u(x,t)$ задачи (1), (2) справедлива оценка

$$I_{r,\mu}(s,\tau) \leqslant c^{(6)} \left\{\frac{r^2}{s} I_{r,\mu}(2s,\tau) + \mu k s d^{n-2} + \frac{\mu}{s} \int\limits_{F_{r,\mu}} (u_r - \mu)\,\lambda_s(t-\tau)\,dxdt\right\} \tag{30}$$

при r, s, τ удовлетворяющих неравенствам (13).

Доказательство. Подставим в интегральное тождество (6)

$$\psi(x, t) = [u_{(h),r}]_\mu \lambda_s^2(t-\tau) - \frac{\mu}{k-m_r} u_{(h),r}(x, t) \lambda_s^2(t-\tau),$$

где использованы обозначения (28).

Как и при получении неравенства (28), имеем

$$\int_\Omega G_{r,\mu}(u) \lambda_s^2(t-\tau)\, dx \Big|_0^{t_1} - 2 \int_0^{t_1} \int_\Omega G_{r,\mu}(u) \lambda_s(t-\tau) \frac{d}{dt} \lambda_s(t-\tau)\, dxdt +$$

$$+ \nu_1 \int_0^{t_1} \int_{E_{r,\mu}^{(t)}} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 \lambda_s^2(t-\tau)\, dxdt \leqslant \frac{1}{2} \frac{\mu}{k-m_r} \int_\Omega u_r^2 \lambda_s^2(t-\tau)\, dx \Big|_0^{t_1} -$$

$$- \frac{\mu}{k-m_r} \int_0^{t_1} \int_\Omega u_r^2 \lambda_s(t-\tau) \frac{d}{dt} \lambda_s(t-\tau)\, dxdt + c_9 \frac{\mu}{k-m_r} \times$$

$$\times \int_0^{t_1} \int_{E_r^{(t)}} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 \lambda_s^2(t-\tau)\, dxdt. \qquad (31)$$

Правая часть (31) не превосходит $c_{10} \mu ksd^{n-2}$ в силу (14) и (4). Оцениваем второй интеграл в левой части (31), используя неравенство Пуанкаре

$$\int_0^{t_1} \int_\Omega G_{r,\mu}(u) \lambda_s(t-\tau) \frac{d}{dt} \lambda_s(t-\tau)\, dxdt \leqslant \frac{c_{11}}{s} \Big\{ \int_Q [u_r]_\mu^2 \lambda_{2s}^2(t-\tau)\, dxdt +$$

$$+ \mu \int_{F_{r,\mu}} (u_r - \mu) \lambda_s(t-\tau)\, dxdt \Big\} \leqslant \frac{c_{12}}{s} \Big\{ r^2 \int_{E_{r,\mu}} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 \lambda_{2s}^2(t-\tau)\, dxdt +$$

$$+ \mu \int_{F_{r,\mu}} (u_r - \mu) \lambda_s(t-\tau)\, dxdt \Big\}.$$

Отсюда и из полученной при доказательстве леммы 3 оценки для значения при $t = 0$ первого интеграла левой части (31) следует неравенство (30), что и доказывает лемму 4.

Лемма 5. Предположим, что выполнены все условия теоремы 3. Существует постоянная $c^{(7)}$ такая, что при $1 < q < 2$ и r, s, τ, удовлетворяющих неравенствам (13), справедлива оценка

$$\int_{F_{r,\mu}} u_r^{-q} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 \lambda_s^2(t-\tau)\, dxdt \leqslant \frac{c^{(7)}}{(q-1)^2} \mu^{1-q} \Big\{ ksd^{n-2} +$$

$$+ \frac{\mu^{1-q}}{rs} \int_{F_{r,\mu}} |x| \cdot u_r^q \lambda_{2s}^2(t-\tau)\, dxdt \Big\}. \qquad (32)$$

Доказательство. Пусть $u_r^{(\mu)}(x, t) = \max\{u_r(x, t), \mu\}$, $u_{(h),r}^{(\mu)}(x, t) = \max\{u_{(h),r}(x, t), \mu\}$ и подставим в (6)

$$\psi(x, t) = \{\mu^{1-q} - [u_{(h),r}^{(\mu)}(x, t)]^{1-q}\} \lambda_s^2(t-\tau) + \{(k-m_r)^{1-q} -$$

$$- \mu^{1-q}\} \frac{1}{k-m_r} u_{(h),r}(x, t) \lambda_s^2(t-\tau).$$

В равенстве, полученном из (6) после указанной подстановки, интегрируем по частям в слагаемых, содержащие производные по t и переходим к пределу при $h \to 0$. Используя оценки (3), получаем

$$\int_\Omega H_{r,\mu}(u)\lambda_s^2(t-\tau)\,dx\,\Big|_0^{t_1} - 2\int_0^{t_1}\int_\Omega H_{r,\mu}(u)\lambda_s(t-\tau)\frac{d}{dt}\lambda_s(t-\tau)\,dxdt +$$

$$+\frac{1}{2}\frac{1}{k-m_r}\{(k-m_r)^{1-q}-\mu^{1-q}\}\Big\{\int_\Omega u_r^2\lambda_s^2(t-\tau)\,dx\,\Big|_0^{t_1} -$$

$$-2\int_0^{t_1}\int_\Omega u_r^2\lambda_s(t-\tau)\frac{d}{dt}\lambda_s(t-\tau)\,dxdt\Big\} + (q-1)\nu_1\int_{F_{r,\mu}} u_r^{-q}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2\lambda_s^2(t-\tau)\times$$

$$\times\, dxdt \leqslant c_{13}\mu^{1-q}\frac{1}{k-m_r}\int_0^{t_1}\int_{E_r^{(t)}}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2\lambda_s^2(t-\tau)\,dxdt, \tag{33}$$

где $H_{r,\mu}(y)$ — определенная на R^1 функция, равная

$$\mu^{1-q}(y-m_r-\mu)+\frac{1}{2-q}\mu^{2-q}-\frac{1}{2-q}(y-m_r)^{2-q}$$

при $y > m_r+\mu$ и нулю при $y \leqslant m_r+\mu$.

Используя оценку (14), из неравенства (33) получаем

$$\int_{F_{r,\mu}} u_r^{-q}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2\lambda_s^2(t-\tau)\,dxdt \leqslant \frac{c_{14}}{q-1}\Big\{\mu^{1-q}skd^{n-2}+\int_\Omega H_{r,\mu}(kf)\lambda_s^2(-\tau)\,dx +$$

$$+\frac{2}{s}\int_0^{t_1}\int_\Omega H_{r,\mu}(u)\lambda_s(t-\tau)\,dxdt\Big\}. \tag{34}$$

Оценим интегралы в правой части (34), замечая, что

$$H_{r,\mu}(y) \leqslant \mu^{1-q}(y-m_r-\mu) \text{ при } y > m_r+\mu.$$

Имеем

$$\int_\Omega H_{r,\mu}(kf)\lambda_s^2(-\tau)\,dx \leqslant \mu^{1-q}\int_{\mathscr{D}_{r,\mu}^{(2)}}[kf(x)-m_r-\mu]\,dx \leqslant c_{15}\mu^{1-q}ksd^{n-2}, \tag{35}$$

где $\mathscr{D}_{r,\mu}^{(2)}$ — множество, введенное при доказательстве леммы 3.

Применяя неравенство Коши, получаем при $\varepsilon > 0$

$$\int_0^{t_1}\int_\Omega H_{r,\mu}(u)\lambda_s(t-\tau)\,dxdt \leqslant \mu^{1-q}\int_{F_{r,\mu}}(u_r-\mu)\lambda_s(t-\tau)\,dxdt \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon r\int_{F_{r,\mu}}|x|^{-1}u_r^{-q}\cdot(u_r-\mu)^2\lambda_s^2(t-\tau)\,dxdt+\frac{\mu^{2-2q}}{\varepsilon r}\int_{F_{r,\mu}}|x|\,u_r^q\lambda_{2s}^2(t-\tau)\,dxdt. \tag{36}$$

И далее оценим первый интеграл правой части по неравенству Пуанкаре

$$\int_{F_{r,\mu}}|x|^{-1}u_r^{-q}(u_r-\mu)^2\lambda_s^2(t-\tau)\,dxdt \leqslant c_{16}r\int_{F_{r,\mu}}\left|\frac{\partial}{\partial x}\left[u_r^{-\frac{q}{2}}(u_r-\mu)\right]\right|^2\lambda_s^2(t-\tau)\times$$

$$\times\, dxdt \leqslant c_{16}r\int_{F_{r,\mu}} u_r^{-q}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2\lambda_s^2(t-\tau)\,dxdt, \tag{37}$$

так как при $u_r > \mu$ справедливо неравенство

$$\left|\frac{\partial}{\partial u}\left[u_r^{-\frac{q}{2}}(u_r-\mu)\right]\right| \leqslant u_r^{-\frac{q}{2}}.$$

Выбирая соответствующим образом ε, получаем из неравенств (34)—(37) оценку (32), что и доказывает лемму 5.

Доказательство теоремы 3. Оценивая интеграл в неравенстве (30), используя (32), (37), получим

$$\frac{\mu}{s}\int\limits_{F_{r,\mu}}(u_r-\mu)\lambda_s(t-\tau)\,dxdt\leqslant\frac{\mu^q}{\sqrt{s}}\int\limits_{F_{r,\mu}}|x|^{-1}u_r^{-q}(u_r-\mu)^2\lambda_s^2(t-\tau)\,dxdt+$$

$$+\frac{\mu^{2-q}}{s\sqrt{s}}\int\limits_{F_{r,\mu}}|x|\,u_r^q\lambda_{2s}^2(t-\tau)\,dxdt\leqslant c_{16}\mu^q\frac{r}{\sqrt{s}}\int\limits_{F_{r,\mu}}u_r^{-q}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2\lambda_s^2(t-\tau)\,dxdt+$$

$$+\frac{\mu^{2-q}}{s\sqrt{s}}\int\limits_{F_{r,\mu}}|x|\,u_r^q\lambda_{2s}^2(t-\tau)\,dxdt\leqslant c_{17}\frac{1}{(q-1)^2}\,\mu\left\{ksd^{n-2}+\right.$$

$$\left.+\mu^{1-q}\frac{1}{s\sqrt{s}}\int\limits_{F_{r,\mu}}|x|\,u_r^q\lambda_{2s}^2(t-\tau)\,dxdt\right\},$$

что и доказывает теорему 3.

4. **Предварительная поточечная оценка.** Переходим от интегральных неравенств к получению поточечных оценок. Доказательство неравенства (9) будет проведено в несколько этапов: вначале получим огрубленную предварительную оценку, затем укажем способ ее уточнения и наконец, докажем теорему 1.

При получении локальной оценки решения в следующей лемме применяется итерационный процесс, предложенный в эллиптическом случае Мозером [4] и используемый в дальнейшем для квазилинейных эллиптических и параболических уравнений многими авторами.

Лемма 6. Пусть $k>0$ и выполнены условия a_1), a_2), f_1), f_2), тогда с некоторой постоянной $c^{(8)}$ для решения $u(x,t)$ задачи (1), (2) справедлива оценка

$$m_{2-1_r}-m_r\leqslant c^{(8)}k\,\frac{d^{n-2}}{r^n}\quad\text{при } r\in[8d,R]. \tag{38}$$

Доказательство. Определим при $j=1,2,\ldots$ числовые последовательности

$$r_j^{(1)}=\frac{r}{4}(1+2^{-j}),\quad r_j^{(2)}=\frac{r}{4}(3-2^{-j}),$$

$$t_j^{(1)}(s,\tau)=\tau-\frac{s}{16}-(1-2^{1-2j})\,r^2,\quad t_j^{(2)}(s,\tau)=\tau+\frac{s}{16}+(1-2^{1-2j})\,r^2.$$

Здесь $\tau\in[0,T]$, $r\in[8d,R]$, $K_1r^2\leqslant s\leqslant T$ с постоянной $\mathcal{K}_1$ из теоремы 2.

В дальнейшем $\psi_j(x)$ — бесконечно дифференцируемая функция, равная единице на $\mathcal{D}_j=\{x: r_j^{(1)}\leqslant|x|\leqslant r_j^{(2)}\}$, нулю вне $\mathcal{D}_{j+1}$ и такая, что $0\leqslant\psi_j(x)\leqslant1$, $\left|\frac{\partial}{\partial x}\psi_j(x)\right|\leqslant\frac{1}{r}2^{j+4}$. Определим еще бесконечно дифференцируемую функцию $\chi_j(t,s,\tau)$, равную единице при $t\in[t_j^{(1)}(s,\tau),\ t_j^{(2)}(s,\tau)]$, нулю при $t\notin[t_{j+1}^{(1)}(s,\tau)\,t_{j+1}^{(2)}(s,\tau)]$, такую, что $0\leqslant\chi_j(t,s,\tau)\leqslant1$, $\left|\frac{d}{dt}\chi_j(t,s,\tau)\right|\leqslant\frac{2^{2j}}{r^2}$. Обозначим $\varphi_j(x,t,s,\tau)=\psi_j(x)\,\chi_j(t,s,\tau)$.

Подставим в интегральное тождество (6)

$$\psi(x,t)=[u_{(h),r}(x,t)]^{\rho+1}\,[\varphi_j(x,t,s,\tau)]^{\sigma+2},$$

где использовано обозначение (28) и ρ, σ — произвольные неотрицательные числа.

После стандартных преобразований и оценок получаем

$$\frac{1}{\rho+2}\int_\Omega u_r^{\rho+2}\varphi_j^{\sigma+2}dx\,\Big|_0^{t_1} - \frac{\sigma+2}{\rho+2}\int_0^{t_1}\int_\Omega u_r^{\rho+2}\varphi_j^{\sigma+1}\frac{d}{dt}\varphi_j\,dxdt + (\rho+1)\,\nu_1\times$$

$$\times\int_0^{t_1}\int_{E_r(t)} u_r^{\rho}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2\varphi_j^{\sigma+2}dxdt \leqslant c_{18}\frac{(\sigma+2)\,2^j}{r}\int_0^{t_1}\int_\Omega u_r^{\rho+1}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|\varphi_j^{\sigma+1}dxdt.$$

Здесь $u_r = u_r(x, t)$ определяется согласно (10).

Из последнего неравенства, используя условие (4), следует оценка

$$\operatorname*{vrai\,max}_{0\leqslant t\leqslant T}\int_\Omega u_r^{\rho+2}(x, t)\,\varphi_j^{\sigma+2}(x, t, s, \tau)\,dx + (\rho+1)^2\int_Q u_r^{\rho}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2\varphi_j^{\sigma+2}dxdt \leqslant$$

$$\leqslant c_{19}\frac{(\sigma+2)^2(\rho+2)^2}{r^2}\,2^{2j}\int_Q u_r^{\rho+2}\varphi_j^{\sigma}dxdt + c_{19}\left[k\left(\frac{d}{r}\right)^{n-2}\right]^{\rho+2} r^n.$$

Используя полученное неравенство и вложения $V_2(Q)$ в $L_{\frac{2(n+2)}{n}}(Q)$, получаем при $\sigma = \left(\frac{n}{2}+2\right)\rho$

$$\int_Q u_r^{\rho+2}\varphi_j^{\sigma+2}dxdt \leqslant c_{20}\left\{\frac{(\rho+2)^4}{r^2}\,2^{2j}\int_Q u_r^{\frac{\rho+2}{n+2}n}\,\varphi_j^{\frac{\sigma+2}{n+2}n-2}dxdt + \right.$$

$$\left. + r^n\left[k\left(\frac{d}{r}\right)^{n-2}\right]^{\frac{\rho+2}{n+2}n}\right\}^{\frac{n+2}{n}}. \qquad (39)$$

Далее выбирая значения ρ, σ в виде

$$\rho = \rho_i = 2\left[\left(\frac{n+2}{n}\right)^i - 1\right], \quad \sigma = \sigma_i = (n+4)\left[\left(\frac{n+2}{n}\right)^i - 1\right],$$

получаем из (39) для

$$J_i = J_i(j, r, s, \tau) = \int_Q u_r^{\rho_i+2}(x, t)\,\varphi_j^{\sigma_i+2}(x, t, s, \tau)\,dxdt + \left[k\left(\frac{d}{r}\right)^{n-2}\right]^{\rho_i+2} r^{n+2} \qquad (40)$$

оценку

$$J_i^{\theta^i} \leqslant c_{21}^{\theta^i}\left(\frac{n+2}{n}\right)^{4i\theta^{i-1}}\left(\frac{2^{2j}}{r^2}\right)^{\theta^{i-1}} J_{i-1}^{\theta^{i-1}}$$

при $\theta = \dfrac{n}{n+2}$, $i = 1, 2, \ldots$

Последовательное применение последнего неравенства дает

$$J_i^{\theta^i} \leqslant c_{21}^{\theta^i+\theta^{i-1}+\ldots+\theta}\cdot\left(\frac{n+2}{n}\right)^{4(i\theta^{i-1}+\ldots+1)}\cdot\left(\frac{2^{2j}}{r^2}\right)^{\theta^{i-1}+\ldots+1} J_0,$$

откуда при $i\to\infty$ получаем оценку

$$\mu_j^2(s, \tau) \leqslant c_{22}\left(\frac{2^j}{r}\right)^{n+2}\left\{\int_Q u_r^2\varphi_j^2 dxdt + \left[k\left(\frac{d}{r}\right)^{n-2}\right]^2 r^{n+2}\right\}. \qquad (41)$$

Здесь

$$\mu_j(s, \tau) = \operatorname*{vrai\,max}_{(x,t)\in G_j(s,\tau)} u_r(x, t),$$

$$G_j(s, \tau) = \{(x, t) : x\in D_j,\ t\in [t_j^{(1)}(s, \tau), t_j^{(2)}(s, \tau)]\}.$$

Оцениваем интеграл в правой части (43), используя неравенство Пуанкаре и оценку (27)

$$\int\limits_Q u_r^2(x,t)\,\varphi_j^2(x,t,s,\tau)\,dxdt \leqslant \int\limits_Q [u_r]^2_{\mu_{j+1}(s,\tau)}\chi_j^2(t,s,\tau)\,dxdt \leqslant c_{23}r^2 \times \quad (42)$$

$$\times \int\limits_{E_{r,\mu_{j+1}(s,\tau)}} \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 \cdot \chi_j^2(t,s,\tau)\,dxdt \leqslant c_{24}\mu_{j+1}(s,\tau)\,kr^2d^{n-2}.$$

Из (43), (44) получаем для $\tilde{\mu}_j = \mu_j(s,\tau) + k\left(\frac{d}{r}\right)^{n-2}$ оценку

$$\tilde{\mu}_j^2 \leqslant c_{25}2^{j(n+2)}\frac{kd^{n-2}}{r^n}\tilde{\mu}_{j+1},$$

откуда последовательной итерацией по j следует неравенство

$$\mu_1(s,\tau) \leqslant c_{26}\frac{kd^{n-2}}{r^n},$$

доказывающее лемму 6.

Лемма 7. Предположим, что для решения $u(x,t)$ задачи (1), (2) при $k > 0$, $R_0 \in [8d, R]$ выполнено неравенство

$$m_{2^{-1}r} - m_r \leqslant \frac{A}{r^n} \text{ для } r \in [8d, R_0] \quad (43)$$

с некоторой положительной A. Тогда справедлива оценка

$$u(x,t) \leqslant \frac{2^n}{2^{n-1}}\cdot\frac{A}{|x|^n} + m_{R_0} \text{ при } (x,t)\in Q,\ |x| \geqslant 8d. \quad (44)$$

Доказательство. В силу (11) достаточно оценить $u(x,t)$ только при $|x| \leqslant R_0$. Для произвольного натурального числа l такого, что $2^{-l}R_0 \geqslant 4d$ из неравенства (43) следует

$$m_{2^{-l}R_0} = \sum_{j=1}^{l}(m_{2^{-j}R_0} - m_{2^{-j+1}R_0}) + m_{R_0} \leqslant \sum_{j=1}^{l}\frac{A}{[2^{-j+1}R_0]^n} + m_{R_0} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{A}{[2^{-l}R_0]^n(2^n-1)} + m_{R_0}.$$

Теперь при $8d \leqslant |x| \leqslant R_0$ определим $l = l(|x|)$ так, чтобы $2^{-l}R_0 < |x| \leqslant 2^{-l+1}R_0$. Для такого x имеем

$$u(x,t) \leqslant m_{2^{-l}R_0} \leqslant \frac{2^n}{2^n-1}\cdot\frac{A}{|x|^n} + m_{R_0},$$

что и доказывает лемму 7.

Следствие 1. Пусть $k > 0$ и выполнены условия a_1), a_2), f_1), f_2). Тогда для решения $u(x,t)$ задачи (1), (2) справедлива оценка

$$u(x,t) \leqslant c^{(9)}kT\cdot\frac{d^{n-2}}{|x|^n} \text{ при } (x,t)\in Q \quad (45)$$

с $c^{(9)} = \frac{1}{T}\max\left\{8^n, \frac{2^n}{2^n-1}c^{(8)}\right\}$, где $c^{(8)}$ — постоянная, определенная в лемме 6.

Достаточно применить лемму 7 при $R = R_0$ и при $|x| < 8d$ воспользоваться оценкой (8).

5. Уточнение поточечных оценок Введем при произвольных положительных $\mathcal{K}, r, \mu, s$ и постоянных n, k, d, имеющих то же значение, что и выше, обозначение

$$R_{r,\mu}(\mathcal{K}, s) = \mathcal{K} s\mu k d^{n-2} + \mu^2 \frac{r}{\sqrt{s}} \left\{\mathcal{K} k\mu^{-1} s \frac{d^{n-2}}{r^n}\right\}^{\frac{2n+1}{2n}} r^n. \quad (46)$$

Теорема 4. Пусть $k > 0$ и выполнены условия a_1), a_2), f_1), f_2). Существуют постоянные $\mathcal{K}_4, \mathcal{K}_5, \mathcal{K}_6$, зависящие лишь от R, T, n, ν_1, ν_2, такие, что из справедливости при некоторых $r' \in [8d, R]$, $s' \in (0, T]$ оценок

$$u(x, t) \leqslant \mathcal{K}_4 k \frac{s' d^{n-2}}{|x|^n} \text{ для } (x, t) \in Q, \ |x| \leqslant r', \quad (47)$$

$$I_{r,\mu}(s', \tau) \leqslant R_{r,\mu}(\mathcal{K}_5, s') \quad (48)$$

с произвольными $r \in [2d, r']$, $\mu \in (0, k - m_r)$, $\tau \in [0, T]$ и из неравенства

$$\mathcal{K}_6 (r')^2 \leqslant s' \quad (49)$$

следует выполнение оценок

$$u(x, t) \leqslant \mathcal{K}_4 k \frac{s'' d^{n-2}}{|x|^n} \text{ для } (x, t) \in Q, \ |x| \leqslant r'', \quad (50)$$

$$I_{r,\mu}(s'', \tau) \leqslant R_{r,\mu}(\mathcal{K}_5, s'') \text{ для } r \in [2d, r''] \quad (51)$$

при $s'' = \frac{s'}{4}$, $r'' = \frac{r'}{2}$ и тех же, что и в (49), значениях μ, τ.

Доказательство. Будем заранее подчинять искомые числа K_4, K_5, K_6 условиям

$$\mathcal{K}_4 \geqslant \max\{c^{(9)}, 8^{n-2}\}, \quad \mathcal{K}_5 \geqslant \frac{c^{(5)}}{T}, \quad \mathcal{K}_6 \geqslant \max\{\mathcal{K}_1, 16\}, \quad (52)$$

где $c^{(9)}, c^{(5)}$ — постоянные, определенные соответственно в следствии 1 и лемме 3.

Предположим выполнение неравенств (47), (48) и оценим $I_{r,\mu}(s'', \tau)$. Для этого будет использована теорема 3, в которой выберем $q = \frac{2n+1}{2n}$. Предварительно оценим интеграл в правой части (26) при $s = s''$, применяя неравенство (47). Получаем при $r \leqslant r'' = \frac{r'}{2}$

$$\int_{F_{r,\mu}} |x| u^q \lambda_{2s''}(t - \tau)\, dx dt \leqslant 4s'' (\mathcal{K}_4 k s' d^{n-2})^q \int_{B(r)} \frac{dx}{|x|^{n-\frac{1}{2}}} \leqslant$$

$$\leqslant c_{27} s'' (\mathcal{K}_4 k s'' d^{n-2})^q \sqrt{r} = c_{27} s'' \left(\mathcal{K}_4 k s'' \frac{d^{n-2}}{r^n}\right)^q r^{n+1}.$$

Здесь и далее считаем $q = \frac{2n+1}{2n}$, через c_j обозначаем постоянные, зависящие лишь от R, T, n, ν_1, ν_2.

Из последнего неравенства и неравенств (26), (48) при $r \in [2d, r'']$, $\mu \in (0, k - m_r)$, $\tau \in [0, T]$ следует оценка

$$I_{r,\mu}(s'', \tau) \leqslant \mathcal{K}_3 \left\{\left[4\frac{r^2}{s''} + \frac{c_{28}}{\mathcal{K}_5}\right] \mathcal{K}_5 \mu k s'' d^{n-2} + \mu^{2-q} \left[4\frac{r^2}{s''} + c_{28}\left(\frac{\mathcal{K}_4}{\mathcal{K}_5}\right)^q\right] \times \right.$$

$$\left. \times \frac{r}{\sqrt{s''}} \left[\mathcal{K}_5 k s'' \frac{d^{n-2}}{r^n}\right]^q r^n\right\}. \quad (53)$$

И доказываемое сейчас неравенство (51) будет выполнено, если подчиним искомые постоянные $\mathcal{K}_4, \mathcal{K}_5, \mathcal{K}_6$ условиям

$$4\mathcal{K}_6^{-1} + c_{28}\mathcal{K}_5^{-1} < \mathcal{K}_3^{-1}, \quad 4\mathcal{K}_6^{-1} + c_{28}\mathcal{K}_4^q \mathcal{K}_5^{-q} < \mathcal{K}_3^{-1}. \quad (54)$$

Таким образом, доказана оценка (51) при K_4, K_5, K_6, удовлетворяющих неравенствам (52), (54).

Далее получим условия, при которых выполняется оценка (50). Из неравенств (41), (42) при $r \leqslant r'$

$$\mu_j^2(s', \tau) \leqslant c_{29} \left(\frac{2^j}{r}\right)^{n+2} \left\{ r^2 \int\limits_{E_{r,\mu_{j+1}(s',\tau)}} \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 \chi_j^2(t, s', \tau)\, dx dt + \right.$$

$$\left. + \left[k\left(\frac{d}{r}\right)^{n-2}\right]^2 r^{n+2} \right\} \leqslant c_{29} \left(\frac{2^j}{r}\right)^{n+2} \left\{ r^2 I_{r,\mu_{j+1}(s',\tau)}(s'', \tau) + \left[k\left(\frac{d}{r}\right)^{n-2}\right]^2 r^{n+2} \right\}. \tag{55}$$

Здесь воспользовались также неравенством (52) и определением функций $\chi_j(t, s, \tau)$, $\lambda_s(t-\tau)$.

Продолжим неравенство (55), используя оценку (53). Получаем

$$\mu_j^2(s', \tau) \leqslant c_{29} 2^{j(n+2)} \left\{ \left[4\frac{r^2}{s''} + \frac{c_{28}}{\mathcal{K}_5}\right] \mathcal{K}_5 \mu_{j+1}(s', \tau)\, k \frac{s'' d^{n-2}}{r^n} + \right.$$

$$\left. + [\mu_{j+1}(s', \tau)]^{2-q} \left[4\frac{r^2}{s''}\left(\frac{\mathcal{K}_5}{\mathcal{K}_4}\right)^q + c_{28}\right] \frac{r}{\sqrt{s''}} \left[\mathcal{K}_4 k s'' \frac{d^{n-2}}{r^n}\right]^q + \left[k\left(\frac{d}{r}\right)^{n-2}\right]^2 \right\}. \tag{56}$$

Обозначим

$$z_j = \mu_j(s', \tau) \left[\mathcal{K}_4 k s'' \frac{d^{n-2}}{r^n}\right]^{-1}. \tag{57}$$

Из (56) для z_j следует неравенство

$$z_j^2 \leqslant c_{29} 2^{j(n+2)} \left\{ [4\mathcal{K}_6^{-1}\mathcal{K}_5 + c_{28}] \frac{1}{\mathcal{K}_4} z_{j+1} + \left[4\mathcal{K}_6^{-1}\left(\frac{\mathcal{K}_5}{\mathcal{K}_4}\right)^q + c_{28}\right] \times \right.$$

$$\left. \times \mathcal{K}_6^{-\frac{1}{2}} z_{j+1}^{2-q} + \frac{1}{\mathcal{K}_5^2} \mathcal{K}_6^{-2} \right\}. \tag{58}$$

Покажем сейчас существование числа $\alpha \in (0, 1)$, зависящего лишь от R, T, n, ν_1, ν_2, такого, что из условия

$$[4\mathcal{K}_6^{-1}\mathcal{K}_5 + c_{28}] \frac{1}{\mathcal{K}_4} < \alpha, \quad \left[4\mathcal{K}_6^{-1}\left(\frac{\mathcal{K}_5}{\mathcal{K}_4}\right)^q + c_{28}\right] \mathcal{K}_6^{-\frac{1}{2}} < \alpha, \quad \mathcal{K}_5^{-2}\mathcal{K}_6^{-2} < \alpha, \tag{59}$$

следует оценка

$$z_1 < \frac{1}{2} \frac{2^n - 1}{2^n}. \tag{60}$$

Если выполнены условия (59), то из неравенства Юнга, имеем

$$z_j \leqslant \{c_{29} 2^{j(n+2)} 2\alpha (z_{j+1} + 1)\}^{\frac{1}{2}} \leqslant \{c_{29} 2^{j(n+2)} 2\sqrt{\alpha}(z_{j+1} + \sqrt{\alpha})\}^{\frac{1}{2}}.$$

Отсюда

$$z_j + \sqrt{\alpha} \leqslant \{(2c_{29} + 1)\, 2^{j(n+2)}\}^{\frac{1}{2}} \alpha^{\frac{1}{4}} (z_{j+1} + \sqrt{\alpha})^{\frac{1}{2}}.$$

Последовательно применяя полученное неравенство и используя ограниченность последовательности $\{z_j\}$, убеждаемся в возможности указанного выбора α, при котором из условий (59) следует оценка (60).

Из оценки (60) и произвольности $\tau \in [0, T]$ получаем при $8d \leqslant r \leqslant r'$ неравенство

$$m_{2^{-1}r} - m_r \leqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{2^n - 1}{2^n} \mathcal{K}_4 k s'' \frac{d^{n-2}}{r^n}. \tag{61}$$

Для дальнейшей оценки применяем лемму 7, выбирая R_0 равным r''. Тогда из (61), (44), (47) при $8d \leqslant |x| \leqslant r''$ имеем

$$u(x, t) \leqslant \frac{1}{2} \mathcal{K}_4 k s'' \frac{d^{n-2}}{|x|^n} + \frac{1}{2^n} \mathcal{K}_4 k s'' \frac{d^{n-2}}{|x|^n},$$

что и доказывает (50) при $|x| \geqslant 8d$. Для $|x| < 8d$ оценка (50) следует из неравенства (8) и условия (52).

Окончательно находим, что справедливо утверждение теоремы 4 при $\mathcal{K}_4, \mathcal{K}_5, \mathcal{K}_6$ удовлетворяющих условиям (52), (54), (59). Удовлетворить же последние условия, например, можно выбрав $\mathcal{K}_5 = \mathcal{K}_4^2$, $\mathcal{K}_6 = \mathcal{K}_4^3$ и взяв достаточно большим, зависящим лишь от R, T, n, ν_1, ν_2 число K_4. Этим заканчивается доказательство теоремы 4.

6. Доказательство теоремы 1. Пусть $r_1^2 = \min\left\{\frac{T}{K_6}, R^2\right\}$, где $\mathcal{K}_6$ — число в теореме 4. Введем две конечные числовые последовательности

$$r_i = 2^{-i+1} r_1, \quad s_i = 2^{-2(i-1)} T, \quad i = 1, 2, \ldots, I,$$

так, чтобы $2^{-I} r_1 < 8d \leqslant 2^{-I+1} r_1$.

Покажем, что при $i = 1, 2, \ldots, I$ выполняются неравенства

$$u(x, t) \leqslant \mathcal{K}_4 k \cdot \frac{s_i d^{n-2}}{|x|^n} \text{ для } (x, t) \in Q, \quad |x| \leqslant r_i, \tag{62}$$

$$I_{r,\mu}(s_i, \tau) \leqslant R_{r,\mu}(\mathcal{K}_5, s_i) \tag{63}$$

при произвольных $r \in [2d, r_i]$, $\mu \in (0, k - m_r)$, $\tau \in [0, T]$. Здесь сохранены обозначения теоремы 4.

При $i = 1$ неравенства (62), (63) следуют соответственно из оценок (45), (27) и условий (52). Выбор чисел r_i, s_i обеспечивает выполнение неравенства $\mathcal{K}_6 r_i^2 \leqslant s_i$, и поэтому в силу теоремы 4 из справедливости оценок (62), (63) при некотором значении i следуют эти оценки для номера $i + 1$. Тем самым установлены неравенства (62), (63) для $i = 1, 2, \ldots, I$.

Перейдем к оценке $u(x_0, t_0)$ в произвольной точке $(x_0, t_0) \in Q$. Пусть вначале $r_I < |x_0| \leqslant r_1$. Определим номер i_0 так, чтобы $r_{i_0+1} < |x_0| \leqslant r_{i_0}$, $1 \leqslant i_0 \leqslant I - 1$. Тогда из (62) имеем

$$u(x_0, t_0) \leqslant \mathcal{K}_4 k \frac{s_{i_0}}{|x_0|^n} d^{n-2} \leqslant 4\mathcal{K}_4 k \frac{T}{r_1^2} \left(\frac{d}{|x_0|}\right)^{n-2} \leqslant$$

$$\leqslant 4\mathcal{K}_4 k \left(\mathcal{K}_6 + \frac{T}{R^2}\right)\left(\frac{d}{|x_0|}\right)^{n-2}. \tag{64}$$

Если $|x_0| \leqslant r_I$, то из (8) следует оценка

$$u(x_0, t_0) \leqslant 16^n \cdot k \left(\frac{d}{|x_0|}\right)^{n-2}. \tag{65}$$

При $|x_0| > r_1$ оценим $u(x_0, t_0)$ по неравенству (45):

$$u(x_0, t_0) \leqslant c^{(9)} k T \frac{d^{n-2}}{|x_0|^n} \leqslant c^{(9)} k \frac{T}{r_1^2} \left(\frac{d}{|x_0|}\right)^{n-2} \leqslant$$

$$\leqslant c^{(9)} k \left(\mathcal{K}_6 + \frac{T}{R^2}\right)\left(\frac{d}{x_0}\right)^{n-2}. \tag{66}$$

Из неравенства (64)—(66) следует оценка (9), что и заканчивает доказательство теоремы 1.

1. *Skrypnik I. V.* Nonlinear elliptic boundary value problems.— Leipzig: BSB Teubner, 1986.— 232 S.
2. *Скрыпник И. В.* О поточечных оценках некоторых емкостных потенциалов // Общая теория граничных задач.— Киев : Наук. думка, 1983.— С. 198—206.

3. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.— М. : Наука, 1967.— 736 с.
4. *Moser T.* A new proof of de Georgi's theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations.— Comm. Pure and Appl. Math.— 1960.— 13, N 3.— P. 457—468.

Ин-т прикл. математики и
механики АН УССР, Донецк

Получено 16.10.89